㊙

追加200册ノ内第109號

高等科學生用

公算學、誤差學參考書

昭和五年八月

海軍砲術學校

沿　　革

本書ハ猪口大尉編「公算誤差學」（昭和二年五月）ヲ増補改訂セルモノナリ

昭和五年八月　　海軍大尉　藤　田　菊　一

高等科學生用

公算學、誤差學參考書

目　次

——(目次終)——

高等科學生用 公算學、誤差學參考書

第一章　公算學

第一節　公算ノ概念

吾人ガ日常目撃シ體驗スル諸事象ヲ始トシ宇宙ニ出現スル事象ノ中ニハ吾人ノ知識ヲ以テシテ豫想通リト首肯サルルコト或程度迄ハ想像シ得タルコト等多々アルト共ニ全ク豫想ニ反シ所謂偶然トヨリ考ヘラレザル事象モ亦極メテ多シ、然レドモ吾人ノ知識ハ深淺廣狹多種多樣ナルヲ以テ甲ニハ全ク豫想外ニ屬スルAナル事象モ乙ニハ當然ノ事象ナリト思ハルルコトアルベシ、之レ即チA事象出現ニ對スル知識ニ於テ乙ハ甲ニ優レルモノアルガ爲ナリ

斯ク觀シ來ルトキ宇宙間諸事象ハ偶然ナルモノナク或根據ニ立脚シテ出現スルモノナラント考察シ得ベシ、諸事象ノ出現カ偶然ナラストセバ其ノ根據ニ基キテ之ヲ豫想シ得ベキ筈ナリ

事象ニ對スル知識充分ナル場合ハ其ノ豫想モ徹底的ナルヲ得ベキモ一般ニ吾人ノ知識ヲ以テシテハ豫想ハ徹底的ナル能ハザルモノ多シ即チ的確ニ其ノ出現不出現ヲ斷定シ得サル場合多シ従ツテ豫想ノ程度ハ

1. 必ス出現スベシ
2. 多分出現スルナラン
3. 出現スルヤ否ヤ何レトモ云ヒ難シ
4. 恐ラク出現セザルベシ
5. 決シテ出現セザルベシ

等、比較的ノ判斷ヲ下シ得ルニ過キス

以上ノ豫想ハ換言スレバ出現スルト考ヘ得ル信認ノ程度ヲ表ハスモノニシテ此ノ信認ノ程度ヲ數量ニテ表ハシタルモノヲ公算ト稱ス

公算學ノ大家 Laplace ハ公算ハ單ニ常識ヲ數學的運用ニヨリ表示シタルモノナリト稱セリ

第二節　公算ノ定義

一事象ノ出現スル公算ハ該事象出現ニ幸運ナル場合ノ數ヲ幸運不運總テノ場合ノ數ニテ除シタル分數ナリ、故ニ公算ハ常ニ０ヨリ１ニ至ル間ノ正ノ實數ナリ

但シ該事象出現不出現ノ難易ハ同程度ナリトス

〔例〕 箱内ニ m 個ノ白球ト n 個ノ黑球ヲ入レアリ、此ノ中ヨリ無心ニ一球ヲ取出ストキ白球ヲ得ル公算ハ

$$P_W=\frac{m}{m+n}$$

黑球ヲ得ル公算ハ

$$P_B=\frac{n}{m+n}$$

而シテ白球黑球何レカヲ得ル公算ハ

$$P=\frac{m+n}{m+n}$$

故ニ

$$P_B+P_W=1$$

〔定理〕 一事象ノ出現スル公算カ P ナルトキハ其ノ出現セサル公算ハ $1-P$ ナリ

第三節　公算ノ意義

骰子ヲ投シ一星ヲ得ル公算ハ⅙ナルコト前節ニ依リ明ナリ、然ラハ公算⅙トハ何ヲ意味スルカト言ヘハ6回試行スレハ必ス1回出現スルトノ意味ニアラズ、無限回數試行スレハ一星ノ出現回數ト試行回數ノ比カ⅙トナルノ意味ナリ、此ノ意味ニ於テ公算ハ極限値ナリト言フヲ得ベシ

公算ハ0ヨリ1迄ノ數値ヲ以テ示サルルコト既述ノ通リニシテ公算1ナルコトハ必ス出現スルヲ意味シ公算0ナルコトハ決シテ出現セサルヲ意味ス、0.5以上ハ出現ノ機會多ク以下ハ出現ノ機會少キヲ意味ス

第四節　用語ノ解説

公　算……確率、確ラシサ

獨立事象……二以上ノ事象アリテ其ノ中ノ一事象ノ成敗カ他ノ事象ノ成敗ニ無關係ナルトキ是等ノ事象ハ互ニ獨立ナリト云フ例ヘハ2個ノ骰子ヲ投スルトキ A 骰子ニテ一星ヲ得ルコトト B 骰子ニテ二星ヲ得ルコトハ互ニ獨立ナリ

従屬事象……二以上ノ事象アリテ其ノ中ノ一事象ノ成敗ガ他ノ事象ノ成敗ニ影響アルトキ後ノ事象ハ前者ニ從屬スト云フ例ヘハ白黒球混入シアル箱内ヨリ1球ヲ取リ出シ之ヲ戻スコトナク更ニ1球ヲ取出スモノトセハ第二回ニ白ヲ得ルコトハ第一回ニ白ヲ得タルカ否ニヨリ公算ヲ變ス、故ニ從屬ス

排反事象……二以上ノ事象アリテ其ノ中ノ一事象カ出現スルトキ他ハ決シテ出現セサル場合是等ノ事象ハ互ニ排反ナリト云フ、例ヘハ骰子ヲ投シ一星ヲ得ル事ト同時ニ二星ヲ得ルコトハ互ニ排反ナリ

複合事象……二以上ノ事象カ共ニ出現シテ成立スル事象ヲ複合事象ト稱シ各事象ヲ部分事象ト稱ス
部分事象ハ互ニ獨立ナルカ又ハ從屬ナリ
例ヘハ彈丸ヲ以テ敵艦ヲ擊沈スルニハ之カ命中シテ且炸裂スルヲ必要ナリト假定スレハ擊沈ナル事象ハ命中ト炸裂ノ複合事象ニシテ命中ト炸裂ハ其ノ部分事象ナリ

第五節　全　公　算

二個以上ノ排反事象ノ中「何レカ」カ出現スル公算ヲ全公算ト稱ス

〔定理〕 $P_1 P_2 \cdots\cdots P_n$ ヲ各事象ノ公算トスレハ各事象ノ「何レガ」カ出現スル公算ハ

$$P = P_1 + P_2 \cdots\cdots\cdots + P_n$$

之ヲ全公算ノ定理ト云フ

〔例〕 骰子ヲ投シ一二星「何レカ」カ出現スル公算ハ

$$P=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

第六節　複　公　算

複合事象ノ公算ヲ複公算ト云フ

〔定理〕 事象 A ノ公算ヲ　P_A

事象 B ノ公算ヲ　P_B

トスレハ A B ノ複合事象ノ公算ハ

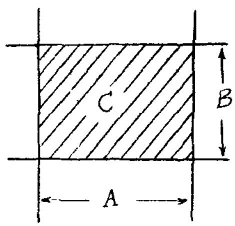
$$P=P_A \times P_B$$

之ヲ複公算ノ定理ト云フ

〔例〕 (イ) 2個ノ骰子ヲ投シ A ハ一星ヲ、B ハ二星ヲ出現スル公算ハ

$$P=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

(ロ) 縦及横ノ方向ニ於ケル命中公算夫々 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ ナル地帯ニテ重リタル地域ノ命中公算ヲ求ム



A 地帯ノ命中公算　$P_A=\frac{1}{2}$

B 〃　〃　$P_B=\frac{1}{4}$

C 地域ノ命中公算ハ

$$P=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

(ハ) 箱内ニ白球3個黒球4個入レアリ、二度續ケテ白球ヲ取出ス公算ヲ求ム、取出シタル球ハ其ノ都度戻スモノトス

1 回白球ヲ取出ス公算　$P_1=\frac{3}{4+3}=\frac{3}{7}$

求ムル公算　$P=\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}=\frac{9}{49}$

(ニ)　(ハ)ノ場合球ヲ其ノ都度戻ササルモノトスレハ

第一回白球ヲ取出ス公算　$P_1=\frac{3}{7}$

第一回白球ヲ得タル後

第二回白球ヲ得ル公算　$P_2=\frac{3-1}{7-1}=\frac{2}{6}$

求ムル公算　$P=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$

(註)　(イ)(ロ)(ハ)ハ部分事象カ獨立事象ナル例ニシテ(ニ)ハ從屬事象ノ例ナリ

第七節　複行公算

公算一定ナル事象カ數回出現スル場合ノ公算ヲ複行公算ト云フ

〔定理〕　事象Aノ出現スル公算ヲPトスレハm回ノ試行中丁度n回出現スル公算ハ$(P+(1-P))^m$ノ展開式ノ第$(m-n+1)$項ニ相當シ

$$\pi={}_mC_nP^n(1-P)^{m-n}$$

之ヲ複行公算ノ定理ト云フ

〔證明〕　丁度n回出現スルタメニハ$(m-n)$回ハ不出現ナラサルヘカラズ、故ニ假ニ特定ノn回出現シ以外ハ出現セサル公算ヲ求ムルトセハ

$$\pi'=P^n(1-P)^{m-n}$$

然ルニ求ムル公算ハ出現ノ時機ニハ制限ナシ、依ツテm回

中ヨリn回ヲトル組合セノ數ヲ乘セサルベカラズ

$$\therefore\quad \pi={}_mC_n\pi'={}_mC_nP^n(1-P)^{m-n}$$

而シテ此ノ右邊ノ形ハ$(P+(1-P))^m$ノ展開式ノ第$(m-n+1)$項ニ等シ

〔定理〕 本節ノ場合Aカ少クトモn回出現スル公算ハ$(P+(1-P))^m$ノ展開式ニ於ケル第一項ヨリ第$(m-n+1)$項迄ノ和ナリ

〔例〕 某照尺ヲ用ヒ標的ニ對シ6發ノ一齊打方ヲ行フアリ各發カ近彈トナル公算ヲ 0.3679 トスルトキ次ノ各種ノ公算ヲ求ム

(イ) 4近2遠ノ公算……${}_6C_4P^4(1-P)^2 \quad = 0.1098$

(ロ) 全 近 〃 …… $P^6 \quad = 0.0024$

(ハ) 全 遠 〃 …… $(1-P)^6 \quad = 0.0638$

(ニ) 夾叉彈 〃 …… $1-P^6-(1-P)^6 = 0.9338$

(ホ) 少クモ一彈近〃…… $1-(1-P)^6 \quad = 0.9362$

(ヘ) 三彈以上近〃 ……

$$\cdots\cdots P^6+{}_6C_5P^5(1-P)+{}_6C_4P^4(1-P)^2+{}_6C_3P^3(1-P)^3 = 0.3840$$

〔例題〕 6門ノ砲ヲ以テ一齊打方ヲ行フ場合其ノ出彈率カ80%ナル時發射彈數對公算ノ關係ヲ求ム

各面ニ夫々 3. 3. 3. 2. 2. 1. 及 3. 3. 3. 2. 2. 2 ヲ刻記セル骰子二個ヲ投シタルトキ兩者ノ合計數對公算ノ關係ヲ求メテ前

ノ答ト比較セヨ

〔定理〕 事象 A ノ出現公算ヲ P トセバ m 回複行ニ於テ n 回丈ケ A ノ出現スル公算ハ n カ $(m+1)P$ ノ整數部分ナルトキ最大ナリ

〔證明〕 m 回複行中各場合ノ公算ハ $(P+(1-P))^m$ ノ展開式ニ於ケル各項ノ値ナリ、今 m 回中 n 回出現シ $(m-n)$ 回出現セサル公算カ最大ナリトス、其ノ値ハ

$$\pi = {}_mC_nP^n(1-P)^{m-n}$$

而シテ此ノ項ノ直前ノ項ハ $(n+1)$ 回丈ケ出現スル公算ニシテ直後ノ項ハ $(n-1)$ 回タケ出現スル公算ナリ而シテ夫等ノ値ハ

$$\pi' = {}_mC_{n+1}P^{n+1}(1-P)^{m-n-1}$$

$$\pi'' = {}_mC_{n-1}P^{n-1}(1-P)^{m-n+1}$$

兩者ノ中間ナル π カ最大ナル爲ニハ

$$\pi' < \pi > \pi''$$

$$\frac{\pi'}{\pi} < 1 > \frac{\pi''}{\pi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

ナルヲ要ス、然ルニ

$$\frac{\pi'}{\pi} = \frac{{}_mC_{n+1}}{{}_mC_n}\ \frac{P^{n+1}(1-P)^{m-n-1}}{P^n(1-P)^{m-n}}$$

$$= \frac{\dfrac{m!}{(n+1)!(m-n-1)!}}{\dfrac{m!}{n!(m-n)!}}\ \frac{P}{1-P}$$

$$= \frac{m-n}{n+1}\ \frac{P}{1-P} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

同様ニ

$$\frac{\pi''}{\pi}=\frac{{}_mC_{n-1}}{{}_mC_n}\,\frac{P^{n-1}(1-P)^{m-n+1}}{P^n(1-)^{m-n}}$$

$$=\frac{n}{m+n+1}\,\frac{1-P}{P}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2) (3) ヲ(1)式ニ代入シテ次ノ二方程式ヲ得

$$(m-n)P<(n+1)(1-P)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$n(1-P)<(m-n+1)P\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(4) ヲ整理スレハ

$$n>P(m+1)-1$$

(5) ヲ整理スレバ

$$n\overset{<}{\ngtr}P(m+1)$$

即チ　$P(m+1)>n>P(m+1)-1$

n ハ整數ナルカ故ニ $P(m+1)$ ノ整數部分ナラサルベカラズ

〔例〕 事象Aノ出現公算 $P=0.3679$ ナルトキ 6 回ノ複行ニ於テAカ幾回出現スル公算最大ナリヤ其ノ公算幾何

$$P(m+1)=2.5753$$

$$\therefore\quad n=2$$

$$\pi={}_6C_2P^2(1-P)^4=0.3242$$

（備考） $n!$ ノ計算ニ於テ n 大ナルトキハ次ノ公式ヲ用フルヲ便トス

Stirling ノ公式　$n!\doteqdot e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}$

〔定理〕 各々獨立セル事象 $A\ B\ C$ ノ公算ヲ各 $P\ q\ r$ トシ m 回ノ複

行ニ於テ A B C カ夫々丁度 n h k 回タケ出現スル公算ハ

(但シ $r=1-P-q$ トス)

$$\pi=\frac{m!}{n!\ h!\ k!}P^n q^h r^k$$

ナリ

〔例〕 射撃ニ於テ近弾命中弾遠弾ノ公算夫々 0.50, 0.25, 0.25 ナルトキ５發ヲ發射シ１近、１中、３遠トナル公算ヲ求ム

$$\pi=\frac{5!}{3!}\ 0.5\times0.25\times0.25^3=0.0391$$

第八節　原因公算

事象 A カ出現シタルトキ其ノ原因ヲ求ムルコト即チ A ハ原因 S ヨリ發シ斯々ノ影響ヲ受ケテ出現シタルモノナリト明瞭ニ決定スルコトハ吾人ノ終局ノ目的ナルモ吾人ノ知識ヲ以テシテハ之ヲ斷定スルコト困難ナルヲ以テ A ハ S ヨリ起リタルモノナラントト推量スル程度ニテ滿足セサルヲ得ス、而シテ此ノ推量カ幾何ノ信用度ヲ有スヘキカ尚他ニ原因ト考フヘキモノアラハ夫ト S トカ A ノ原因ト推量サルル信用度ノ差異ハ幾何ナリヤト云フコトヲ數量的ニ表示スルヲ原因公算ト云フ、前節迄ハ原因ヲ詳知シ夫ヨリ事象ノ出現スル公算ヲ求ムル方法例ヘハ箱内ニ白球 m 個黑球 n 個アリト旣知シ之ヨリ一球ヲ取出シ白球ヲ得ル公算ヲ求ムル方法ヲ說キタルモ本節ニ於テハ箱内ニ白黑球合セテ m 個アリトイフコトハ知ルモ其ノ配合不明ナル時一球ヲ取出シ白球ナリシ場合箱内ノ配合ハ如何ナルラシキヤ之ヲ信スヘキ程度ハ幾何ナリヤト云フコトヲ求ムル方法ヲ述ヘントス

出現シタル事象Aノ原因ヲ推定スルニ當リ其ノ原因ト考ヘラルルモノ多種アリテ孰レモAノ原因タリ得ルトキAガ其ノ原因ノ一ヨリ出現セリト信シ得ル程度ハ該原因カ他ノ原因ニ比シ存在シ易キヤ否ヤ又該原因ヨリAハ生シ易キヤ否ヤノ兩者ニ關係スヘシ之ヲ數理的ニ云ヘバ事象Aノ原因ヲS_1ニ歸シ得ル公算ハS_1ガ存在シ得ル公算(先天公算)ω_1トS_1ヨリAノ出現スル公算P_1トノ複公算ニ比例スルモノナリ

〔定理〕 原因$S_1 S_2 \cdots\cdots S_n$カ存在シ得ル公算ヲ夫々$\omega_1 \omega_2 \cdots\cdots \omega_n$トシ此等原因ヨリ事象$A$カ出現スル公算ヲ夫々$P_1 P_2 \cdots\cdots P_n$トスレハ事象$A$ノ原因ヲ$S_1$ニ歸シ得ル公算ハ

$$\pi_1 = \frac{\omega_1 P_1}{\Sigma \omega P}$$

一般ニ

$$\pi = \frac{\omega P}{\Sigma \omega P}$$

〔定理〕 原因$S_1 S_2 \cdots\cdots S_n$カ存在シ得ル公算カ等シキトキハ

$$\pi = \frac{P}{\Sigma P}$$

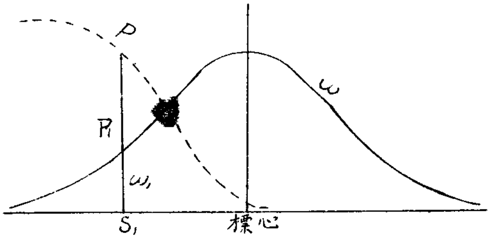
〔例〕 測距ヲ使用セル射撃ニ於テ全近ヲ得タリトス此ノ時全近ヲ生セシムル原因ハ射心ト標心ノ距離ニシテ其ノ距離カ$S_1 S_2 \cdots\cdots S_n$ナリ、爾餘ノ誤差ナシトスレハ$S_1 S_2 \cdots\cdots S_n$ハ測距誤差ナリ、然ルニ測距誤差ハ誤差法則ニヨリ生起スルヲ以テ$S_1 S_2 \cdots\cdots S_n$ハ各々生起公算ヲ異ニス、換言スレハ$S_1 S_2 \cdots\cdots S_n$ガ存在シ得ル公算ヲ異ニス、之レ即チ$\omega_1 \omega_2 \cdots\cdots \omega_n$ニ相當ス

次ニ $S_1 S_2 \cdots\cdots S_n$ ノ原因ニヨリ全近ヲ生スル公算ハ $P_1 P_2 \cdots\cdots P_n$ ナリ、次ニ射心カ S_1 ニアリト信シ得ル公算ハ

$$\pi_1 = \frac{\omega_1 P_1}{\Sigma \omega P}$$

一般ニ

$$\pi = \frac{\omega P}{\Sigma \omega P}$$



〔例〕 箱内ニ白黒合セテ５球アリ此ノ箱内ヨリ１個宛二回球ヲ取出シタルニ二回共ニ白ヲ得タリ箱内ノ配合及其ノ公算ヲ求ム

配合ハ次ノ四種アリ　（球ハ戻サザルモノトス）

(イ)	白	1	黒	4
(ロ)	〃	2	〃	3
(ハ)	〃	3	〃	2
(ニ)	〃	4	〃	1

而シテ之等原因ハ存在ノ難易ニ於テ差異ナシ、故ニ此ノ場合先天公算ハ

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = Const$$

次ニ之等ノ原因ヨリ白球ヲ二回續ケテ取出ス公算 $P_1 P_2 \cdots\cdots P_n$ ヲ求ムレハ

(イ) ノ場合　$P_1=\frac{1}{5}\times\frac{1-1}{5-1}=0$

(ロ) 〃　$P_2=\frac{2}{5}\times\frac{2-1}{5-1}=\frac{1}{10}$

(ハ) 〃　$P_3=\frac{3}{5}\times\frac{3-1}{5-1}=\frac{3}{10}$

(ニ) 〃　$P_4=\frac{4}{5}\times\frac{4-1}{5-1}=\frac{6}{10}$

故ニ

$$\pi=\frac{P}{\Sigma P}$$

ヨリ　π_1 ……… π_4　ヲ求ムレハ

$$\pi_1=0$$

$$\pi_2=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{3}{10}+\frac{6}{10}}=\frac{1}{10}$$

$$\pi_3=\cdots\cdots\cdots\cdots\ \frac{3}{10}$$

$$\pi_4=\cdots\cdots\cdots\cdots\ \frac{6}{10}$$

〔例題〕 或射撃ニ於テ A照尺ニテ近弾ヲ得ル公算0.3　B照尺ニテハ近弾ノ公算0.4　C照尺ニテハ遠弾ノ公算0.3　D照尺ニテハ遠弾ノ公算0.4ナリト云フ、以上ノ中或照尺ヲ用ヒ二回連續射撃シ孰レモ近弾ヲ得タリ、何レノ照尺ヲ用ヒタリト考ヘ得ルカ其ノ公算如何

但シ標的命中界ハ０トス

第九節　未來公算

過去ニ於テ事象ガ出現シタルトキ其ノ出現狀況ヲ基礎トシ次ノ事象ノ出現公算ヲ求メ之ヲ未來公算ト稱ス

即チ既出事象ニ對シ其ノ原因タリ得ベキモノヲ列擧シ先ツ各々ノ原因公算ヲ求メ此ノ原因公算ヲ基トシテ次ノ事象ノ出現スル公算ヲ表示セントスルモノナリ、例ヘハ白黑合セテm個入レアル箱內ヨリ一球ヲ取出シタルニ白球ヲ得タリ、次ニ一球ヲ取出シ再ヒ白球ヲ得ル公算如何ト云フガ如キモノナリ、或ハ或射擊ニ於テ第一齊射ニ全近ヲ得タリ之ニ對シ　$+x$　ノ修正ヲ行ヒテ第二齊射ヲ發射シ反方位彈ヲ得ル公算如何ト云フガ如シ

〔定理〕　既出事象Aヲ現出セシメ得ル諸原因ノ中「何レカ」ノ一原因ヨリ未來ニ於テ次ノ事象 A' ヲ出現スベキ公算ハ諸原因ノ原因公算 $\pi_1 \pi_2 \cdots\cdots\cdots \pi_n$ ト諸原因ヨリ A' ヲ出現スル公算 $P_1 P_2 \cdots\cdots P_n$ ノ相乘積ノ總和ナリ

〔說明〕

原　因　…　…　…　…　$S_1 S_2 \cdots\cdots S_n$

Sカ A ノ原因トナル公算　$\pi_1 \pi_2 \cdots\cdots \pi_n$

SヨリA'ノ出現スル公算　$P_1 P_2 \cdots\cdots P_n$

Sカ原因トナリテ Aノ出現スル公算$\pi_1 P_1 \quad \pi_2 P_2 \cdots\cdots \pi_n P_n$

然ルトキハ $S_1 S_2 \cdots\cdots S_n$ 中「何レカ」ノ原因ニヨリテ A' ノ出現スル公算ハ

$$\xi = \Sigma \pi P$$

〔例〕 前節ノ例ニテ次ニ一球取出ストキ黒球ヲ得ル公算如何

原　因 …………	(ロ)	(ハ)	(ニ)
π …………	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$
白二球取出シタル後ノ配合	黒 3	黒 2 白 1	黒 1 白 2
次ニ黒ヲ取出ス公算 P …	$\frac{3}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
πP …………	$\frac{3}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{6}{30}$

故ニ「何レカ」ノ原因ニヨリ黒ヲ取出ス公算即チ求ムル公算ハ　$\xi = \Sigma\pi P = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

第十節　經驗公算

未來公算ノ一種ニシテ事象ガ既往ニ於テ出現セル經驗ヲ有スルトキ其ノ原因ハ明カナラザルモ過去ノ經驗ヨリ推シテ次ニ又其ノ出現スル公算ヲ求メ得

〔定理〕 過去ニ於テ m 回試行中 A 事象ガ n 回出現シタルトキ未來ニ於テ A ノ出現スル公算ハ

$$P = \frac{n+1}{m+2}$$

【證明略ス】

〔例〕 太陽カ明朝東ヨリ出ツル公算ヲ求ム

$$P = \frac{\infty+1}{\infty+2} = 1$$

〔例〕 同一照尺ヲ用ヒ 6 回射撃ヲ行ヒ 3 回遠ヲ得タルトキ次ニ遠ヲ得ル公算ヲ求ム

$$P=\frac{3+1}{6+2}=\frac{1}{2}$$

第十一節　期　望　値

事象Aノ出現公算ガPナルトキm回施行中豫期シ得ル出現回數ヲ期望値ト稱シ

$$N=mP$$

ヲ以テ表ハス、例ヘバ一發ノ命中公算Pナルトキm發發射シタルトキノ豫期命中數ハmP發ナリ、然レトモ期望値モ亦他ノ諸公算ト同シク極限値ニシテm發發射シテ必スmP發命中スルノ意ニアラズ無限ノ彈數發射スレバ其ノ命中數ハmP發ナリト云フニ外ナラズ

第二章　誤差學

第一節　誤差學ノ目的

凡ソ一定量ヲ測的スルニ當リ吾人ノ考フル同一狀況同一精度ヲ以テスルモ數回觀測セル各値ニハ多少ノ誤差ヲ伴フモノナリ、例ヘハ測距ニ於テ各測定値ニ必ラス多少ノ誤差ヲ生ズルガ如シ、故ニ吾人ノ知識ヲ以テシテハ終ニ眞値ヲ求ムルコト能ハザルナリ、從ツテ各觀測値カ果シテ如何程ノ誤差ヲ伴ヘルヤモ不明ナリ、然レトモ之等多數ノ觀測値ヲ綜合シ適當ニ處理スルトキハ最モ眞値ニ近キ値ヲ求メ得ヘク然ルトキハ斯クシテ得タル量ヲ眞値トシテ取扱ヒ得ベキナリ
誤差學ノ目的ハ誤差生起ノ法則ヲ探究シテ各觀測値ノ綜合處理ノ方法ヲ究メ最モ眞ニ近キ價ヲ求ムルニアリ

第二節　誤差ノ種類

觀測値ニ伴フ誤差即チ吾人ノ誤差ト稱スルモノハ凡ソ次ノ三種類ニ區別スルヲ得ヘシ

(イ) 固有誤差或ハ定誤差

一定ノ原因ニヨリテ一方向ニ同量タケ連續生起スルモノニシテ原因ヲ探究スルコトニヨリ容易ニ修正シ得ル誤差ナリ

例ヘハ各種測器ノ誤差照準器不正ニヨル射距離差等ノ如シ

(ロ) 偶發誤差或ハ單ニ誤差

測者ノ注意周到ニシテ測器又正シキモ避クル能ハサル誤差ナ

リ、而シテ其ノ誤差ノ量ハ一定ノ値ヲ有セス其ノ修正モ不可能ナリト雖モ其ノ生起ニハ一定ノ法則アリ、多數ノ觀測ヲ一團トシテ考フルトキハ此ノ法則ヲ適用スルコトニ依リ眞ニ近キ値ヲ求メ得ルナリ、以下講究スル所ハ此ノ種ノ誤差ナリ

(ハ) 過　誤

過失、不熟練等ヨリ何等ノ法則ニモ拘ラス突發スル誤差ナリ例ヘハ目盛ノ誤讀、彈丸滑落ニヨル不羈彈ノ如キモノナリ

第三節　用語ノ解說

(イ) 平均値

算術平均値

$M_1+M_2\cdots\cdots M_n$ ヲ觀測値トスレハ算術平均値ハ

$$\frac{M_1+M_2\cdots\cdots+M_n}{n}=\frac{\Sigma M}{n}$$

自乘平均値

上ノ場合自乘平均値ハ

$$\sqrt{\frac{M_1^2+M_2^2\cdots\cdots+M_n^2}{n}}=\sqrt{\frac{\Sigma M^2}{n}}$$

(ロ) 眞　値

(ハ) 最確値

誤差法則上最モ眞ニ近シト認メ得ル値

(ニ) 誤　差

(ホ) 平均誤差

誤差ノ絶對値ノ平均値

(ヘ) 平均自乘誤差

誤差ノ自乘ノ平均値ノ平方根

第四節　誤差生起ノ實驗的法則

(一) 小ナル誤差ハ大ナル誤差ヨリ生起スル公算大ナリ

（小誤差ハ大誤差ヨリ起リ易シ）

(二) 絶對値等シキ誤差ノ生起公算ハ等シ

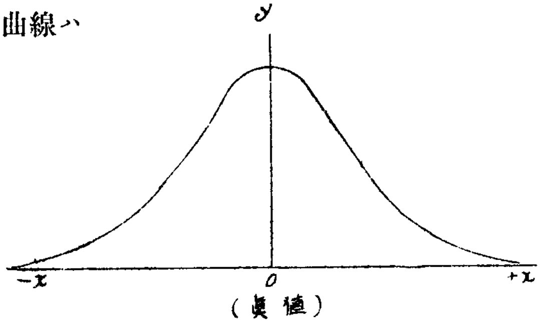
（大キサ等シキ誤差ハ正負同程度ノ容易サヲ以テ起ル）

(三) 著シク大ナル誤差ハ生起セス

以上ヲ圖解スレハ下圖ノ如シ横軸ハ誤差ノ量ニシテ縦軸ハ其ノ生起公算ナリ、曲線ハ

$$y = f(x)$$

ナル形ヲトル



（備考）米國陸軍ニテハ射程200碼ニ標的ヲ置キ中央ヲ照準シテ小銃ヲ1000發發射シ（1898）次ノ實驗成績ヲ得タリ

x	+5	+4	+3	+2	+1	0	−1	−2	−3	−4	−5
彈着數	1	4	10	89	190	212	204	193	79	16	2

第五節　誤差生起ノ法則

〔定理〕 最確値ハ觀測値ノ算術平均値ナリ

證明略ス

吾人ハ前掲定理ニ依リ最確値Z_0ハ觀測値ノ算術平均値ナルヲ知レリ之レ總テノ人ノ承認スル所ナルベシ、即チ

$$Z_0=\frac{\Sigma M}{n} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

以下此ノ定理ヲ承認シテ誤差生起ノ公算

$$y=f(x)$$

ナル函數ノ形ヲ定メントス

未知數ヲ觀測シテ $M_1 M_2 \cdots\cdots M_n$ ヲ得タル場合其ノ眞値ヲ Z ナリト認メ得ル公算ハ複公算竝ニ原因公算ノ理ニ依リ

$$P=\frac{f(Z-M_1)f(Z-M_2)\cdots\cdots f(Z-M_n)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(Z-M_1)f(Z-M_2\cdots\cdots f(Z-M_n)dZ}$$

$$=Cf(Z-M_1)f(Z-M_2)\cdots\cdots f(Z-M_n) \cdots\cdots\cdots (2)$$

ナリ、故ニ此ノ公算ノ値ヲ最大ナラシムル Z ノ値ハ最確値ナリ

(2)式ヲ對數微分シ０ト置ケハ最確値ヲ與フル算式ヲ得ベシ

$$C\left\{\frac{f'(Z-M_1)}{f(Z-M_1)}+\frac{f'(Z-M_2)}{f(Z-M_2)}\cdots\cdots+\frac{f'(Z-M_n)}{f(Z-M_n)}\right\}=0$$

$$F(Z-M_1)+F(Z-M_2)\cdots\cdots+F(Z-M_n)=0 \cdots\cdots (3)$$

但シ　$F(Z-M)=\dfrac{f'(Z-M)}{f(Z-M)}$

之レ Z カ最確値タルノ條件式ナリ、　故ニ(3)式ノ與フル Z ノ値ハ(1)式ノ Z_0 ニ一致スベキナリ、毎觀測ノ誤差ヲ

$x_1 x_2 \cdots\cdots x_n$ トスレバ(1)(3)式ハ夫々

$$x_1 + x_2 \cdots\cdots x_n = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

$$F(x_1)+F(x_2) \cdots\cdots F(x_n) = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

(4)(5)式ヨリ次ノ如ク云フヲ得べシ、函數 $F(x)$ ハ $x_1 x_2 \cdots\cdots x_n$ ノ和カ 0 ナラバ $F(x_1) F(x_2) \cdots\cdots F(x_n)$ ノ和モ亦0 トナル如キモノナリ、　今 $n=2$ ナル場合ヲ考フレバ

$$x_1 + x_2 = 0$$

ナルトキ

$$F(x_1)+F(x_2)=0$$

依ツテ

$$F(x_1)=-F(x_2)=-F(-x_1)$$

即チ $F(x)$ ハ x ノ奇函數ナラサルべカラズ

次ニ $n=3$ ナル場合ヲ考ヲレバ

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

ナルトキ

$$F(x_1)+F(x_2)+F(x_3)=0$$

兩式ヨリ x_3 ヲ消去シ

$$F(x_1)+F(x_2)=-F(x_3)=-F(-x_1-x_2)=F(x_1+x_2)$$

$$\therefore \quad F(x_1)+F(x_2)=F(x_1+x_2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

$F(x)$ ハ (6) ノ如キ關係ヲ滿足セザルべカラズ

以上ヨリ $F(x)$ ノ形ヲ決定スルコトヲ得、(6) ハ恒等式ナルヲ以テ偏微分スルモ亦恒等式ヲ得

$$F'(x_1)=F'(x_1+x_2)$$

$$F'(x_2)=F'(x_1+x_2)$$

$$\therefore\quad F'(x_1)=F'(x_2)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(7)$$

x_1 x_2 ノ如何ニ拘ラス(7)式ハ成立スルヲ以テ

$$F'(x)=const$$

之ヲ積分スレバ

$$F(x)=cx+c'\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(8)$$

(8)ヲ(6)式ニ代入スレバ

$$cx_1+c'+cx_2+c'=c(x_1+x_2)+c'$$

$$\therefore\quad c'=0$$

依ツテ

$$F(x)=cx$$

此ノ $F(x)$ ノ値ヲ

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=F(x)$$

ニ代入シ積分スレバ

$$log\,f(x)=\frac{c}{2}x^2+c''$$

或ハ

$$f(x)=C.\,e^{\frac{c}{2}x^2}\qquad\text{但シ}\quad c''=log\ C$$

次ニ C 及 c ノ値ヲ定メントス、實驗法則ニ依レバ誤差小ナル程生起公算大ナルヲ以テ c ハ負數ナラサルベカラズ、依ツテ

$$c=-2h^2$$

ト置ケバ

$$f(x)=C.e^{-h^2x^2}$$

次ニ公算ノ法則ヨリ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$$

ナルコト明カナルヲ以テ

$$\int_{-\infty}^{\infty} C.e^{-h^2x^2}\,dx=2C\int_{0}^{\infty} e^{-h^2x^2}\,dx=1$$

之ヲ積分スルタメニ

$$hx=t$$

$$\therefore\quad dx=\frac{1}{h}dt$$

ト置ケバ

$$2C\int_0^{\infty}\frac{1}{h}e^{-t^2}\,dt=2\frac{C}{h}\int_0^{\infty}e^{-t^2}\,dt=2\frac{C}{h}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$$

$$\therefore\quad C=\frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

依ツテ $f(x)$ ノ形ハ

$$f(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$$

之レ即チ Gauss ノ誤差法則ナリ

第六節　公算曲線ノ研究

公式　$y=f(x)=\dfrac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$ ヲ吟味スレバ

(イ)　y ハ x ノ偶函數ナリ、故ニ曲線ハ y 軸ニ關シ對稱ナリ

(ロ)　y ハ常ニ正數ナリ

(ハ) $x=0$ ノトキ $y=\dfrac{h}{\sqrt{\pi}}$

微分係數 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2h^3}{\sqrt{\pi}}xe^{-h^2x^2}$ ヲ吟味スレバ

(ニ) $x=0$ 及ヒ $x=\infty$ ニ於テ $\dfrac{dy}{dx}=0$

故ニ y ハ $x=0$ ニ於テ最大 $x=\pm\infty$ ニ於テ最小

(ホ) x ノ正（負）値ニ對シ $\dfrac{dy}{dx}$ ハ負（正）値ナリ故ニ x ノ正値ニ於テ曲線ハ Descending. 負値ニ於テ Ascending ナリ

換言スレバ x ノ絶對値増セハ y ハ減ズ

(ヘ) h ノ性質

$$\frac{dy}{dh}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}(1-2h^2x^2)$$

故ニ

$$x^2<\frac{1}{2h^2} \quad ナルトキ \quad \frac{dy}{dh}>0$$

$$x^2=\frac{1}{2h^2} \quad 〃 \quad \frac{dy}{dh}=0$$

$$x^2 \gtrless \frac{1}{2h^2} \quad 〃 \quad \frac{dy}{dh}\lessgtr 0$$

之ヲ換言スレバ x 小ナルトキハ h 増セハ y 増シ x 大ナレバ h 増スニ從ヒ y 減ズ、更ニ換言スレバ h 増スニ從ヒテ小ナル誤差ノ出現スル公算ハ増シ大ナル誤差ノ出現スル公算ハ減ス

即チ h 大ナル程観測ハ精密ナリ、此ノ意味ニ於テ h ヲ精度常數ト云フ

第七節　精度常數hノ値

精度常數hノ値ハ直接之ヲ求ムルコト不能ナルモ平均誤差若クハ平均自乘誤差トノ關係式ヨリ求ムルコトヲ得

(イ)　平均誤差εトhノ關係

xト$x+\Delta x$ノ間ノ各誤差ノ起ル公算ハ相等シク

$$y=f(x)$$

ナリトスレバn回試行中 xト $x+\Delta x$ ノ間ニハ $nf(x)\Delta x$ 回ノ誤差生起スベシ、從ツテ之等誤差ノ和ハ

$$S=xnf(x)\Delta x$$

ナルベシ、總テノ誤差ノ總和ヲSトスレバ

$$S=\sum_{-\infty}^{+\infty}S=\int_{-\infty}^{\infty}xnf(x)dx=2n\int_0^{\infty}x\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}dx$$

$$\frac{-1}{2h^2}e^{-h^2x^2}=u$$

ト置ケバ

$$xe^{-h^2x^2}dx=d\cancel{x}\,u$$

又　$x=0$ ニ於テ　$u=-\dfrac{1}{2h^2}$

　　$x=\infty$　〃　　$u=0$

故ニ

$$S=2n\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{-1}{2h^2}}^{0}du=\frac{2nh}{\sqrt{\pi}}\Big[u\Big]_{-\frac{1}{2h^2}}^{0}=\frac{n}{\sqrt{\pi}h}$$

然ルニ

$$\varepsilon=\frac{\Sigma x}{n}=\frac{S}{n}$$

$$\therefore \quad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,h}$$

或ハ

$$h = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\varepsilon}$$

(ロ) 平均自乘誤差 E ト h ノ關係

(イ)ニ述ベタル如ク n 回試行中 x ト $x+\Delta x$ ノ間ノ誤差ハ $nf(x)\,\Delta x$ 回生起ス從ツテ之等誤差ノ自乘ノ和ハ

$$S = x^2 n f(x)\,\Delta x$$

總テノ誤差ノ自乘ノ總和ヲ S トスレバ

$$S = \sum_{-\infty}^{+\infty} S = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 n f(x)\,dx = 2n\int_0^{\infty} x^2 \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}\,dx$$

$$hx = t$$

ト置キテ整頓スレバ

$$S = \frac{2n}{\sqrt{\pi}\,h^2}\int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt$$

部分法ニヨリ

$$u = t \qquad dv = e^{-t^2}\,t\,dt$$

ト置ケバ

$$du = dt \qquad v = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$$

$$\therefore \quad S = \frac{2n}{\sqrt{\pi}\,h^2}\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\,t\right]_0^{\infty} + \frac{n}{\sqrt{\pi}\,h^2}\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,at$$

公式ニヨリ

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\therefore \quad S = \frac{n}{\sqrt{\pi}\,h^2}\left[-e^{-t^2}\,t + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]_0^{\infty} = \frac{n}{2h^2}$$

然ルニ

$$E=\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}}=\sqrt{\frac{S}{n}}$$

$$\therefore\quad E=\sqrt{\frac{1}{2h^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\,h}$$

又ハ

$$h=\frac{1}{\sqrt{2}\,E}$$

第八節　公算積分並ニ公算表第一表

x ト $x+dx$ ノ間ノ一誤差ノ生スル公算ハ

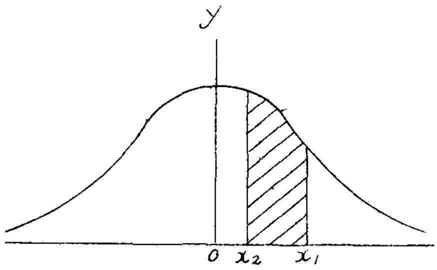
$$P_0=f(x)dx=ydx$$

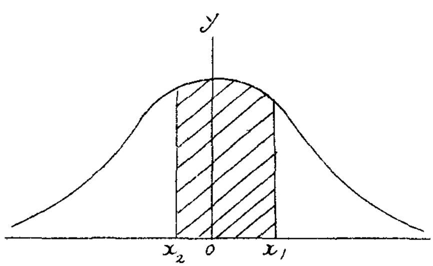
ナルコトハ既ニ知ル所ナリ、従ツテ x_1 ト x_2 ノ間ノ一誤差ノ生ズル公算ハ

$$P=\int_0^{x_1} ydx \pm \int_0^{x_2} ydx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ニテ與ヘラル、此ノ値ハ下圖ニ於ケル影線部分ノ面積ニ相當ス

但シ x 軸ト曲線ニ圍ルル全面積ハ１ナリ





故ニ一般ニ

$$\int_0^x ydx$$

ノ値ヲ積分シ計算編表シ置ケバ誤差生起ノ公算ヲ行フニ便ナリ、誤差公算ハ左右對稱ナルヲ以テ誤差カ $+x$ ト $-x$ ノ間ニ起ル公算ハ

$$P=\int_{-x}^{+x} ydx=2\int_0^x ydx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

一般ニ(2)式ノ値ヲ編表スルヲ例トス

積分ニ當リ x ヲ變數トシテ計算スレハ極メテ繁雜ナルヲ以テ hx ヲ變數トシテ計算ス、即チ

$$P=2\int_0^x ydx=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-h^2x^2}\,dx$$

$$hdx=d(hx)$$

$$\therefore\quad P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hx} e^{-h^2x^2}\,d(hx)$$

此ノ積分値ヲ hx ヲ基目トシテ編表セルモノ即チ公算表第一（常用表 P11）ナリ

第九節　公算誤差並ニ公算表第二表

觀測ニ伴フ諸誤差中或誤差 r ヨリ大ナル誤差ノ生起公算ト之ヨリ小ナル誤差ノ生起公算カ相等シキトキ該誤差 r ヲ公算誤差ト云フ

而シテ r ハ次ノ如キ意味ヲ有スルモノナリ

(イ)　h トノ關係

公算表第一表ニ於テ $P=0.5$ ニ對スル hx ノ x ノ値ハ公算誤

差ナリ、依テ表ニヨリ $P=0.5$ ニ對スル hx ヲ求ムレバ 0.4770 ナリ

$$\therefore\quad hr = 0.4770$$

$$r = \frac{0.4770}{h}$$

(ロ) <u>$\varepsilon. E$ トノ關係</u>

第七節ニヨリ

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,h} \qquad \text{或ハ} \qquad h = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\varepsilon}$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}\,h} \qquad \text{或ハ} \qquad h = \frac{1}{\sqrt{2}\,E}$$

又

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\Sigma x}{n} \doteqdot \frac{\Sigma v}{\sqrt{n(n-1)}} \\ E &= \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}} \doteqdot \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \text{此ノ關係ノ説明省略ス}$$

故ニ $0.4770=\rho$ ト置ケハ

$$r = \rho.\,\varepsilon.\sqrt{\pi} = 0.8453\frac{\Sigma x}{n} \doteqdot 0.8453\frac{\Sigma v}{\sqrt{n(n-1)}}$$

及ヒ

$$r = \rho.\,E\sqrt{2} = 0.6745\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}} \doteqdot 0.6745\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}}$$

公算表第一ハ hx ヲ基目トセルモノニシテ使用上稍不便ナルモ之ヲ一層便利ナル $\frac{x}{r}$ ヲ基目トスルモノニシテ改算スルヲ得、r ノ定義ニ依リ

$$r = \frac{\rho}{h}$$

ナルヲ以テ

$$\frac{x}{r}=\frac{hx}{\rho}$$

故ニ hx ヲ基日トスル代リニ $\dfrac{hx}{\rho}$ 即チ $\dfrac{x}{r}$ ヲ基日トシテ P ノ値ヲ編表シ得、公算表第二（常用表$P12$）即チ之ナリ

第十節　算術平均値ノ誤差

算術平均値ハ最確値ニシテ必スシモ眞値ニアラズ從ツテ誤差ヲ伴フモノナリ、而シテ吾人カ日常體驗スルカ如ク平均値ノ誤差ハ觀測回數ノ大ナル程小ナリ、即チ平均値ノ精度ハ觀測回數ノ大小ニ依ル數理的ニ證明スレバ次ノ如シ

$M_1\ M\cdots\cdots\cdots\cdots M_n$　ヲ觀測値

$Z_0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$　ヲ算術平均値

$v_1 v_2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots v_n$　ヲ剰餘（算術平均値ト各觀測値ノ差）

$x_1 x_2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots x_n$　ヲ誤差（眞値ト各觀測値ノ差）

$u\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$　ヲ Z_0 ト眞値ノ差即チ Z_0 ノ誤差

トス、然ルトキハ

$$x_1=Z_0+u-M_1=v_1+u$$

$$x_2=Z_0+u-M_2=v_2+u$$

$$x_n=Z_0+u-M_n=v_n+u$$

故ニ　$\Sigma x^2=\Sigma(v+u)^2=\Sigma v^2+\Sigma 2vu+nu^2$

然ルニ　Z_0 ハ算術平均値ナルヲ以テ

$\Sigma v=0$　及ヒ　$\Sigma v^2=k$

$\therefore\ \Sigma x^2=k+nu^2$

次ニ $y_1 y_2 \cdots\cdots y_n$ ヲ誤差 $x_1 x_2 \cdots\cdots x_n$ ニ對スル生起公算トスレバ此等諸誤差ノ連續生起スル公算ハ

$$P=\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2\Sigma x^2}=\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2(k+nu^2)}$$

$$=K\,e^{-nh^2u^2} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

之ヲ換言スレバ算術平均値 Z_0 ノ生起スル公算ハ算術平均値ニ u ナル誤差ノ生起スル公算ナリ、K ハ u ニ關係ナク h 及 n ニ關スル函數ナリ、而シテ K ノ値ハ

$$K\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh^2u^2}\,du=2K\int_0^{\infty} e^{-nh^2u^2}\,du=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ナル條件ヨリ求メ得

$$\sqrt{n}\,hu=t$$

ト置キ (2) 式ヲ書キ換フレバ

$$2K\int_0^{\infty} e^{-nh^2u^2}\,du=\frac{2K}{\sqrt{n}\,h}\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt=\frac{2K}{\sqrt{n}\,h}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$$

$$\therefore\quad K=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

故ニ (1) 式ハ

$$P=\frac{\sqrt{n}\,h}{\sqrt{\pi}}e^{-nh^2u^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

之ヲ單一觀測ノ誤差公算ニ比較スレハ其ノ精度常數ヲ $\sqrt{n}$ 倍トセルモノニ同シ

算術平均値ノ精度常數ヲ h_0 トスレバ

$$h_0=\sqrt{n}\,h \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

算術平均値ノ公算誤差ヲ r_0 トスレバ

$$r_0=\frac{\rho}{h_0}=\frac{\rho}{\sqrt{n}\,h}=\frac{r}{\sqrt{n}} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

(4) (5) 式ハ單一觀測値ノ精度ト算術平均値ノ精度ノ關係式ナリ

例ヘハ精度同一ナル n 臺ノ測距儀ヲ用ヒ平均測距ヲ求ムレバ其ノ精度ハ單一測距儀ノ精度ノ $\sqrt{n}$ 倍ナリ、換言スレバ其ノ平均第二差ハ單一ノモノノ $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 倍トナル譯ナリ

第十一節　合併公算誤差

(一) 合成誤差カ各誤差ノ和トシテ生起スル場合

今 u v ヲ各誤差トシ合成誤差 x ハ兩者ノ和トス

$$x=u+v$$

多數ノ觀測ヲ行ヘハ

$$x_1=u_1+v_1$$

$$x_2=u_2+v_2$$

$$x_n=u_n+v_n$$

各式ノ兩邊ヲ自乘シテ相加フレハ

$$x_1^2=u_1^2+2u_1v_1+v_1^2$$

$$x_2^2=u_2^2+2u_2v_2+v_2^2$$

$$x_n^2=u_n^2+2u_nv_n+v_n^2$$

$$\Sigma x^2=\Sigma u^2+2\Sigma uv+\Sigma v^2$$

n カ大ナルトキハ

$$\Sigma uv=0$$

$$\therefore\ \Sigma x^2=\Sigma u^2+\Sigma v^2$$

第九節ニヨリ

$$r=0.6745\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}}=K\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}}$$

$$r^2=K^2\ \frac{\Sigma x^2}{n}$$

今第一ノ誤差ニ對スル公算誤差ヲ r_1 第二ノ夫レヲ r_2 トスレバ

$$r_1^2=K^2\ \frac{\Sigma u^2}{n}$$

$$r_2^2=K^2\ \frac{\Sigma v^2}{n}$$

合成誤差ノ公算誤差ヲ R トスレバ

$$R^2=K^2\ \frac{\Sigma x^2}{n}=K^2\ \frac{\Sigma u^2+\Sigma v^2}{n}=r_1^2+r_2^2$$

之レ合成誤差ノ公算誤差ヲ與フル算式ナリ、三個以上ノ合成誤差ノ場合モ同樣ニシテ、一般ニ

$$R^2=r_1^2+r_2^2\cdots\cdots r_n^2$$

〔例〕 射撃ニ於ケル戰闘公誤ハ射表記載ノ<u>單砲公誤 r_1</u> <u>照準公誤 r_2</u> <u>砲齡公誤ニ對スル射距離差 r_3</u> 及裝塡狀況ノ差異ニヨル<u>射距離公誤 r_4 ノ合併公誤</u>ナリ

(二) <u>合成誤差カ二個以上ノ誤差ノ任意函數トシテ生起スル場合</u>

例ヘハ的針的速ニ誤測アルトキ算出セル的變距ニ生スル誤差或ハ各邊ノ長サニ誤測アル時立體ノ體積ニ生スル誤差ノ如シ

今的針、的速ヲ夫々 $\theta.s$ トスレバ的變距 D ハ

$$D=f(\theta.s)$$

θ 及 s ニ誤差アルトキ D ニ生ズル誤差ハ次式ニテ與ヘラル

$$\Delta D=\frac{\partial f}{\partial \theta}\Delta\theta+\frac{\partial f}{\partial s}\Delta s$$

即チ合成誤差ハ各誤差ニ其ノ偏微分係數ヲ乘シタルモノノ和ナルヲ見ル、從ツテ $\theta . s$ ノ公算誤差ヲ $r_1 r_2$ トスレバ
合成誤差ノ公算誤差 R ハ

$$R^2=\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}r_1\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial s}r_2\right)^2$$

第十二節　觀測値ノ重率竝ニ重率ト精度ノ關係

前節迄ニ述ヘシ平均値算出法ハ凡テ觀測カ同一狀況ノ下ニ於テ行ハレタルモノトシテ換言スレバ各觀測値ノ信用度等シトシテ論述セシモ實際問題トシテハ各觀測ノ狀況等シカラサルコト屢々ナリ
以下信用度異ル觀測値ノ取扱ヲ述ベントス、觀測値ノ信用度ヲ其ノ重率ト稱ス、或未知數ヲ同一條件ニテ觀測中 $M_1 M_2 \cdots\cdots M_n$ ナル觀測値ヲ夫々 $\omega_1 \omega_2 \cdots\cdots \omega_n$ 回得タリトス然ルトキハ最確値ハ
第四節述フル所ニヨリ算術平均値ニシテ

$$Z_0=\frac{\omega_1 M_1+\omega_2 M_2\cdots\cdots\omega_n M_n}{\omega_1+\omega_2\cdots\cdots\omega_n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ニシテ $\omega_1 \omega_2 \cdots\cdots \omega_n$ カ夫々觀測値 $M_1 M_2 \cdots\cdots M_n$ ノ重率ナリ、此ノ場合ハ各觀測ノ價値ハ同一ナルモ同觀測値ノ出現ノ回數ノ差ニヨリ其ノ觀測値ニ重率ノ差ヲ生ジタル譯ナリ、然ルニ普通ノ場合ハ各觀測ハ必スシモ同一條件ニアラズ
測手ノ熟否測器ノ精否等一樣ナラザルコトアルベシ、斯ル場合ハ各觀測値ノ精度異ル即チ同シク一回ノ觀測値ナルモ其ノ信用度ニ差異

アリ、從ツテ最確値モ單ナル算術平均値ニアラズシテ重率ヲ加味セルモノトナラザルベカラズ、次ニ精度ト重率ノ關係ヲ述ベン

$M_1\ M_2 \cdots\cdots\cdots\cdots M_n$ ヲ觀測値

$h_1\ \ h_2 \cdots\cdots\cdots\cdots h_n$ ヲ各精度常數

$y_1\ \ y_2 \cdots\cdots\cdots\cdots y_n$ ヲ各誤差ノ生起公算

$Z_0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ヲ最確値

$Z \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ヲ眞値

トスレバ

$$y_1 = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2(Z-M_1)^2}$$

$$y_2 = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2(Z-M_2)^2}$$

$$y_n = \frac{h_n}{\sqrt{\pi}} e^{-h_n^2(Z-M_n)^2}$$

然ルトキ Z ガ最確値ナル爲ニハ上記諸公算ノ複公算

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n h_1 h_2 \cdots\cdots h_n\, e^{-h_1^2(Z-M)^2 \cdots\cdots - h_n^2(Z-M_n)^2}$$

カ最大ナルヲ要ス、之ガ爲ニハ右邊 e ノ指數

$$-[h_1^2(Z-M_1)^2 + h_2^2(Z-M_2)^2 \cdots\cdots h_n^2(Z-M_n)^2]$$

カ最小ナルヲ要ス、之ヲ Z ニ關シ微分シ 0 ト置ケバ

$$2h_1^2(Z-M_1) + 2h_2^2(Z-M_2 \cdots\cdots + 2h_n^2(Z-M_n) = 0$$

上式ノ與フル Z ノ値ハ最確値ナリ

$$Z_0 = \frac{h_1^2 M_1 + h_2^2 M_2 \cdots\cdots + h_n^2 M_n}{h_1^2 + h_2^2 \cdots\cdots h_n^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

(2)式ヲ (1)式ニ比較シ次ノ如ク云フヲ得

各觀測値ノ精度異ルトキハ最確値ハ各精度常數ノ自乘ヲ觀測値ノ重率トシテ平均セル値ナリ、換言スレバ各觀測値ノ重率ハ其ノ精度常數ノ自乘ニ比例ス

次ニ算術平均値ノ重率ニツキ述ベン

第十節ニ依リ觀測ノ條件同一ナル觀測値ノ算術平均値ノ精度常數ハ各觀測ノ精度常數ヲ h トスレハ

$$H = \sqrt{n}\,h$$

$$\therefore\ H^2 = nh^2$$

然ルニ重率ハ精度常數ノ自乘ニ比例スルガ故ニ算術平均値ノ重率ハ平均ニ用ヒタル觀測値ノ數ニ比例ス

第十三節　疑ハシキ觀測値ノ除去

觀測中ニ誤差ト云フヨリモ寧ロ過誤ト思ハルル結果ヲ得タルトキ之ヲ過誤ト見做スベキヤ、或ハ誤差トシテ取扱フベキヤノ問題ニ逢着スベシ、故ニ如何程迄ノ範圍内ハ誤差トシテ取扱フベキモノナリトノ所謂誤差ノ極限ヲ決定シ置ク必要アリ、此ノ極限決定ニ關シ「ショビネー」(Chouvenet's method)「マヅリー」(Mazzuoli's method)ノ方法アリ一般ニ前者ヲ使用ス、今

x …… 或觀測ニ於ケル最大誤差（誤差ノ極限）

P …… 最大誤差以内ノ誤差ノ生起公算

m …… 觀測回數

トスレバ m 回ノ觀測中最大誤差以上ノ誤差ノ生起回數ハ

$$n=m-mP$$

「シヨビネー」法ニアリテハ $n=\frac{1}{2}$ 換言スレハ m 回ノ觀測中 x 以上ノ誤差ハ $\frac{1}{2}$ 回起ルトノ見地ヨリ

$$n=\frac{1}{2}=m(1-P)$$

式ヨリ P ノ値ヲ求メ $\frac{x}{r}$ 表ヨリ此ノ P ニ對スル $\frac{x}{r}$ ヲ求メ x ヲ決定ス

「マゾリー」法ニアリテハ之ヲ

$$n=1=m(1-P)$$

トシテ x ヲ決定ス

斯クシテ決定シタルヲ基トシ之以外ノ範圍ハ不羈値トシテ除去スルナリ

第十四節　最小自乘法則

剩餘ノ自乘ノ總和カ最小ナルトキ此ノ決定値ハ最モ眞ニ近シトノ法則ニシテ算術平均値ハ此ノ法則ニヨルモ最モ眞ニ近キ値ナリ

〔證明〕

第十二節(2)式ニ至ル經過諸式ニ於テ

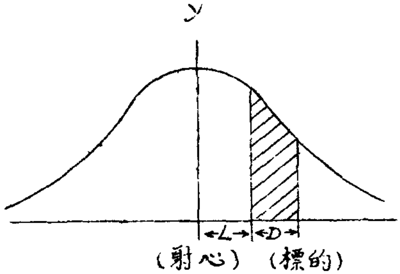
$$h_1=h_2\cdots\cdots h_n=const$$

ト置ケバ可ナリ

第三章　射擊關係諸公算

第一節　命中公算

毎發ノ命中公算



L……射心ト目標基脚トノ距離

D……目標ノ命中界

r……戰鬪公算誤差

トスレハ一發發射シテ之ガ命中界內ニ彈着スル公算ハ

$$P=\int_0^{L+D} ydx-\int_0^L ydx$$

即チ影線ノ部分ノ面積ニ相當ス

〔例〕　$L=100$

$D=50$

$r=50$

ナルトキ毎發ノ命中公算ヲ求ム

$\int_0^{L+D} ydx=\frac{0.9570}{2}$……公算表ニ於テ $\frac{x}{r}=\frac{150}{50}=3$ ニ對スルモノ

$\int_0^{L} ydx=\frac{0.8227}{2}$……　〃　$\frac{x}{r}=\frac{100}{50}=2$　〃

$\therefore\quad P=\frac{1}{2}(0.9570-0.8227)=0.0672$

毎發ノ命中公算 P ナルトキ m 發々射シテ n 發命中スル公算

第一章第六節ニヨリ

$$P_n = {}_mC_n P^n (1-P)^n$$

次ニ少クトモ一發命中スル公算ハ

$$P_0 = 1-(1-P)^m$$

〔例〕 $L = 80$

$D = 40$

$r = 80$

$n = 6$

ナルトキ２發命中スル公算及１發以上命中スル公算ヲ求ム

毎發ノ命中公算ハ公算表ヲ用ヒ

$$P = \frac{1}{2}(0.6883-0.5000) = 0.0942$$

２發命中スル公算ハ

$$P_2 = {}_6C_2 P^2 (1-P)^4 = 15 \times 0.0942^2 \times 0.9058^4 = 0.0896$$

１發以上命中スル公算ハ

$$P_0 = 1-(1-P)^6 = 1-0.9058^6 = 0.4479$$

第二節　公算楕圓

射撃ニ於テ左右方向ノ命中公算ヲ度外視スレバ前節ニ見ル如ク射心ヨリ射線方向上ノ距離一定ナル諸點即チ射線ニ直角ナル直線上ノ諸點ハ命中公算相等シ然ルニ之ニ左右ノ命中公算ヲ加味スレバ命中公算一定ナル點ノ軌跡ハ楕圓トナル之ヲ公算楕圓ト云フ

公算楕圓ノ形

$$P_y=\frac{h_y}{\sqrt{\pi}}e^{-h_y^2y^2}$$ ……遠近方向ノ命中公算

$$P_x=\frac{h_x}{\sqrt{\pi}}e^{-h_x^2x^2}$$ ……左右方向ノ命中公算

トスレバ一點 $(x.\ y)$ ノ命中公算ハ

$$P=P_yP_x=\frac{h_yh_x}{\pi}e^{-(h_y^2y^2+h_x^2x^2)}$$

依テ此點ト命中公算ヲ等シクスル點ハ次ノ式ヲ滿足セサル可ラズ

$$\frac{h_yh_x}{\pi}e^{-(h_y^2y^2+h_x^2x^2)}=const$$

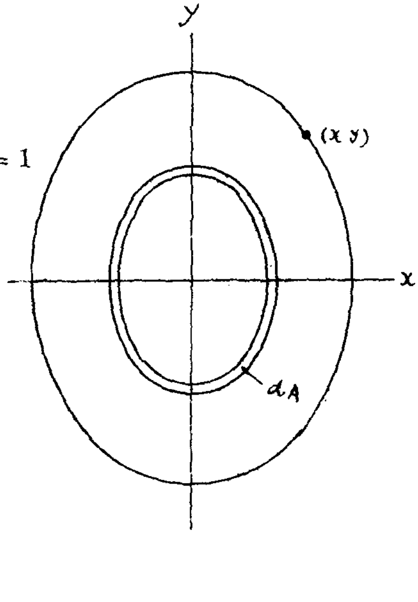
之カ爲ニハ左邊 e ノ指數カ定値ナルヲ要ス之ヲ

$$h_y^2\,y^2+h_x^2\,x^2=K^2$$

ト置ケハ即チ

$$\frac{y^2}{\left(\frac{K}{h_y}\right)^2}+\frac{x^2}{\left(\frac{K}{h_x}\right)^2}=1$$

ニシテ軌跡ハ即チ楕圓ナリ



公算楕圓内ノ命中公算

上圖ニ於テ dA ヲ微小楕圓 Ring ノ面積トスレバ此ノ Ring 内ノ命中公算ハ

$$dP=\frac{h_yh_x}{\pi}e^{-(h_y^2y^2+h_x^2x^2)}dA$$

$$=\frac{h_y h_x}{\pi}e^{-K^2}dA$$

Kヲ變數トシテ上式ヲ積分スレバ楕圓内ノ命中公算ヲ得

$$P=\int_{K=0}^{K=K}dP=\int_{K=0}^{K=K}\frac{h_y h_x}{\pi}e^{-K^2}dA \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

楕圓ノ $x.y$ 方向ノ半徑ヲ夫々 $a.b$ トスレバ

$$a=\frac{K}{h_x}$$

$$b=\frac{K}{h_y}$$

$$\therefore\quad A=\pi ab=\frac{\pi K^2}{h_x h_y}$$

$$dA=\pi\frac{1}{h_x h_y}2KdK \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(2) ヲ (1) ニ代入シテ

$$P=\int_0^K 2Ke^{-K^2}dK$$

茲ニ於テ

$$K^2=t$$

ト置ケバ

$$2KdK=dt$$

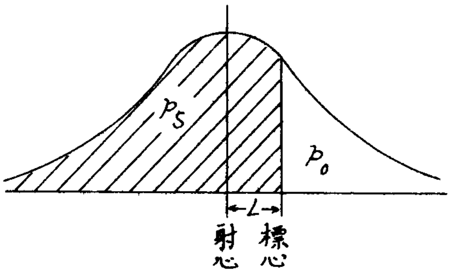
$$\therefore\quad P=\int^{K=K}e^{-t}dt=\Big[-e^{-t}\Big]_{K=0}^{K=K}=\Big[e^{-K^2}\Big]_0^K=1-e^{-K^2}$$

然ルニ

$$K=h_x a=h_y b$$

$$\therefore\quad P=1-e^{-h_x^2 a^2}=1-e^{-h_y^2 b^2}$$

第三節　全遠(近)公算



Lヲ射心標心間ノ距離トスレバ（目標幅ナキモノトス）目標ニ對シ一發發射シテ近ヲ得ル公算ハ

$$p_S=\frac{1}{2}+\int_0^L ydx$$

同樣ニ遠ヲ得ル公算ハ

$$p_O=\frac{1}{2}-\int_0^L ydx$$

故ニn發々射シテ全近、全遠ヲ得ル公算ハ

$$P_S=p_S^n=\left[\frac{1}{2}+\int_0^L ydx\right]^n$$

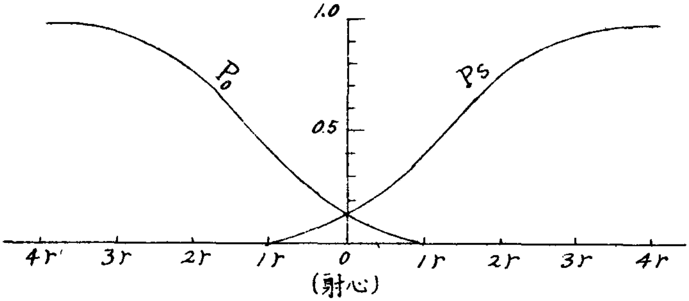
$$P_O=p_O^n=\left[\frac{1}{2}-\int_0^L ydx\right]^n$$

Lノ値異レバ上記公算モ從ツテ異ル、Lヲ横軸トシ之ニ對スル全遠（近）公算ヲ縦軸ニ作圖スレバ全遠（近）公算曲線ヲ得

〔例〕 3發發射ノ場合ノ全遠全近公算曲線ヲ描ケ

L	$-1r$	0	$+1r$	$+2r$	$+3r$	$+4r$
毎發ノ全近公算 p_s	0.25	0.5	0.75	0.91	0.98	0.99
P_s	0.016	0.125	0.42	0.75	0.94	0.97

全遠公算ハ之ト對稱ナリ、之ヲ作圖スレバ次圖ノ如シ



射心移動アル場合ハ之ヲ加味シテ同様ニ算出スルヲ得

第四節　全遠(近)弾ヲ得タル場合ノ目標存在公算

單ニ一齊射ヲ行ヒ全遠(近)弾ヲ得タルノミニテ他ニ條件ナキ場合ハ目標存在公算ハ無限ノ近(遠)ニ於テ最大ナリ依テ此ノ場合ノ目標存在公算曲線ハ全遠(近)公算曲線ニ相似ノモノタラザルベカラス、然レトモ實際ノ場合ニハ必ス他ニ條件アリ、例ヘバ初弾ナラバ測距又ハ目測ニテ目標ノ距離ヲ或精度ヲ以テ測定シアルベク爾後ニ於テハ其ノ前回ノ齊射ニテ夾叉弾或ハ反方位弾ヲ得タル等ノ如シ

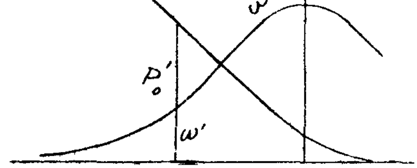
即チ目標存在ヲ推定スル一ツ以上ノ條件アルベシ

今初弾カ全遠ナリシトキ目標存在公算ヲ計算スル方法ヲ示サン

下圖ニ於テ

ω ……測距誤差曲線

P_0 ……全遠公算曲線



ω ハ射心標心間ノ距離（測距誤差）ノ出現公算ヲ示ス曲線ナルヲ以テ換言スレバ

目標存在ノ先天公算ヲ示スモノナリ

今Tニ於ケルω P_0ノ値ヲ夫々ω' P_0'トスレハ標的カTニアル先天公算ハω'標的Tニアルトキ全遠ヲ得ル公算ハP_0'從ツテ標的カTニアリテ且全遠ヲ得ル公算ハω' P_0'ニテ表ハサル

故ニ原因公算ノ理ニヨリ標的カTニアリト認メ得ル公算ハ

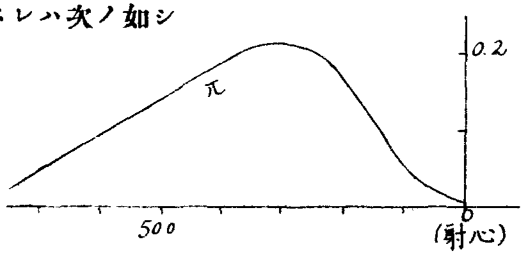
$$\pi = \frac{\omega' P_0'}{\Sigma \omega P_0}$$

之ヲTノ種々ノ位置ニ關シ算出シ曲線ヲ描ケハ目標存在公算曲線ヲ得

〔例〕　測距公誤250ニシテ爾餘ノ誤差ナキ場合初彈($n=6$)ニ全遠ヲ得タリ目標存在公算曲線ヲ描ケ、但シ　$r=100$　トス

標的位置	+200	+100	0	−100	−200	−300	−400	−500	−600	−700	以上
射心標心距離測距公誤單位	+0.8	+0.4	0	−0.4	−0.8	−1.2	−1.6	−2.0	−2.4	−2.8	
ω	0.0929	0.1035	0.1073	0.1035	0.0929	0.0775	0.0601	0.0435	0.0291	0.0183	0.0215
射心標心距離散圖公誤單位	+2	+1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	
P_0	0	0.0002	0.0156	0.1781	0.5730	0.8782	0.9795	0.9986	1.000	1.000	1.000
ωP_0	0	0	0.0017	0.0184	0.0532	0.0681	0.0590	0.0433	0.0291	0.0183	0.0215
$\Sigma \omega P_0$	0.3126										
π	0	0	0.0054	0.0589	0.1702	0.2178	0.1888	0.1385	0.0934	0.0586	

之ヲ作圖スレハ次ノ如シ



射心移動アル場合ハ之ヲ加味シテ同様ニ求ムルヲ得

〔例題〕

測距公誤	400
戰鬪公誤	80
射心移動公誤	60
發射彈數	4

初彈ニテ全近ヲ得タリ、目標存在公算曲線ヲ描ケ

但シ測距以外ノ誤差ハ測距誤差ニ含マレ居ルモノトス

第五節　夾叉公算

夾叉彈ヲ得ル公算

此ノ場合ハ換言スレバ全彈カ同時ニ遠又ハ近トナラザル公算ナリ

L …… 射心標心間ノ距離

P_S …… L ニ對スル全近公算

P_O ……　〃　全遠公算

トスレバ夾叉彈ヲ得ル公算ハ

$$P=1-P_S-P_O=1-\left(\int_{-\infty}^{L} ydx\right)^n-\left(\int_{L}^{\infty} ydx\right)^n$$

〔例〕 $L = 40$

$r = 80$

$n = 6$

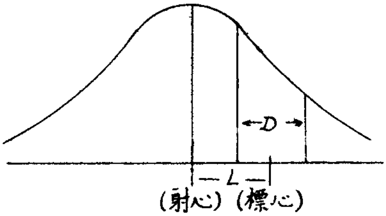
ナルトキ夾叉彈ヲ得ル公算ヲ求ム

$$\int_{-\infty}^{L} ydx=\frac{1}{2}+\frac{0.2641}{2}=0.6321$$

$$\int_{L}^{\infty} ydx=\frac{1}{2}-\frac{0.2641}{2}=0.3679$$

$$\therefore \quad P=1-0.6321^{6}-0.3679^{6}=0.9337$$

次ニ標的命中界アル場合夾叉弾トナルカ或ハ１發以上ノ命中彈ヲ得ル公算ハ前項ニ命中界ヲ加味スレバ可ナリ



L ……射心標心間ノ距離

D ……目標命中界

n ……發射彈數トスレバ

夾叉彈トナルカ又ハ一發以上ノ命中彈ヲ得ル公算ハ

$$P=1-\left(\int_{-\infty}^{L-\frac{D}{2}} ydx\right)^{n}-\left(\int_{L+\frac{D}{2}}^{\infty} ydx\right)^{n}$$

L ノ値異レハ夾叉公算又從ツテ異ル L ト夾叉公算ノ曲線ヲ夾叉公算曲線ト稱ス

〔例題〕　$r=80$

$n=6$

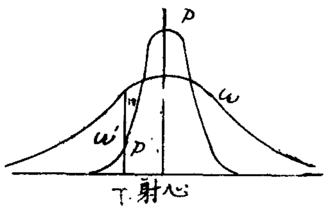
ナルトキノ夾叉公算曲線ヲ描ケ

目標位置未知ナルトキ夾叉彈ヲ得ル公算

前項ニ於テハ射心標心間ノ距離ヲ既知シテ夾叉彈ヲ得ル公算ヲ求メタリ、然ルニ吾人ノ場合ニハ之ヲ豫知スル能ハズ唯測距精度等ヨリニ照尺距離ニ對スル目標ノ存在公算ヲ知リ得ルノミ、此ノ如キ場合

ニ其ノ照尺ニテ發射セルトキ夾叉公算幾何ナルヤ初弾ノ場合ニツキ之ヲ求ムル方法ヲ述ベン

初照尺決定ニ際シテハ測距誤差、變距誤測、當日修正量誤差、費消時見越誤差等ハ免レ能ハサルヲ以テ初弾ハ之等各誤差ノ合成誤差ニ從ヒ偏倚スベシ、而シテ其ノ偏倚公算ハ以上諸誤差ノ公誤ノ合併公誤ニ對スルモノナルベシ、之ヲ初弾偏倚公誤ト稱シ連年ノ實射ニ於ケル初弾偏倚量ヨリ求メ得ベシ



圖ニ於テ

ω ……初弾偏倚公算曲線

P ……夾叉公算曲線

今 T ナル位置ヲ考フルニ目標カ T ニアル公算ハ ω' 此ノ時ノ夾叉公算ハ P' ナリ、故ニ目標カ T ニアリテ且夾叉弾ヲ得ル公算ハ $\omega' P'$ ナリ、然ルニ此場合ハ目標位置ハ T ニ限ラス兎ニ角夾叉弾ヲ得レハ可ナルヲ以テ其ノ公算ハ

$$\psi = \Sigma \omega P$$

〔例〕

初弾偏倚公誤	400
戰 鬪 公 誤	100
發 射 弾 數	6

ナルトキ初弾カ夾叉弾トナル公算ヲ求ム

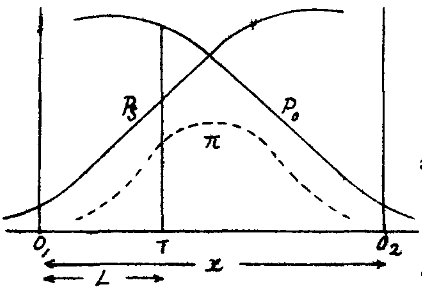
目標位置	−500	−400	−300	−200	−100	0	+100〜500
同上初偏公誤單位	1.25	1.0	0.75	0.50	0.25	0	
ω	0.0471	0.0535	0.0592	0.0635	0.0663	0.0672	
戰鬪公誤單位	5	4	3	2	1	0	
P	0.0027	0.0205	0.1218	0.4306	0.8217	0.9688	
ωP	0.0001	0.0011	0.0072	0.0273	0.0545	0.0650	0.0902
ψ	0.2454						

夾叉彈トナルカ又ハ一發以上ノ命中彈ヲ得ル公算モ之ニ準ス

射心移動アル場合ニハ之ヲ加味シテ以上ノ公算ヲ求メ得ベシ

第六節　照尺ヲ異ニスル二射彈ヲ以テ目標ヲ夾叉スル公算

二射彈ヲ以テ夾叉スル公算



T ………目標位置

O_1O_2 ……夫々第一、第二照尺射心

x ………射心間隔即チ照尺差

L ………O_1T ノ距離

n ………發射彈數

トスレバ O_1 照尺ニテ全近ヲ得ル公算ハ

$$P_S=\left(\int_{-\infty}^{L} y\,dx\right)^n$$

又 O_2 照尺ニテ全遠ヲ得ル公算ハ

$$P_0=\left(\int_{-(x-L)}^{\infty} ydx\right)^n$$

故ニ O₁ ニテ全近ヲ O_2 ニテ全遠ヲ得ル公算ハ二者ノ複公算ニシテ

$$P=P_sP_0=\left(\int_{-\infty}^{L} ydx\right)^n\left(\int_{-(x-L)}^{\infty} ydx\right)^n$$

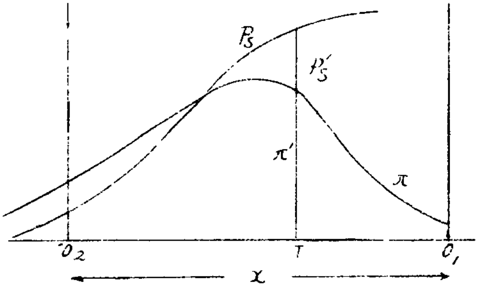
次ニ二射彈ニテ目標ヲ夾叉セル時目標カ T ニアリト思ハルル公算ハ

$$\pi=\frac{P}{\Sigma P}=\frac{P_s P_0}{\Sigma P_s P_0}$$

而シテ P_s ト P_0 曲線ハ對稱ナルヲ以テ π ノ値ハ O_1 O_2 ノ中央ニテ最大ナリ、即チ二射彈ニテ目標ヲ夾叉シタルトキハ目標カ兩射心ノ中央ニアリト思ハルル公算最大ナリ

<u>A 照尺ニテ全遠(近)ヲ得タルトキ次ニ $A\mp x$ ナル照尺ニテ反方位彈ヲ得ル公算</u>

第四節ニヨリ O_1 照尺ニテ全遠(近)ヲ得タルトキ之ト他ノ條件ニテ目標存在公算ヲ求メ得、斯クノ如キ存在公算ヲ有スル目標ニ對シ次ニ $O_1\mp x$ ナル照尺ニテ反方位彈ヲ得ル公算ヲ求メントスルニアリ、此ノ公算ヲ<u>捕捉公算</u>トイフ



左圖ニ於テ

π ……目標存在公算曲線

P_s……第二照尺ニヨル全近公算曲線

今 T ナル點ヲ考フルニ目標ノ T ニアル公算ハ π' ニシテ

目標 T ニアレバ O_2 照尺ニテ全近ヲ得ル公算ハ P_S' ナリ、從ツテ目標 T ニアリテ且 O_2 照尺ニテ全近ヲ得ル公算ハ $\pi' P_S'$ ニテ與ヘラル、然ルニ求ムルモノハ T ノ位置ニ關セズ兎ニ角 O_2 ニテ全近ヲ得レバ可ナルヲ以テ其ノ公算ハ

$$\eta = \Sigma \pi P_S$$

〔例〕 第四節ノ例ヲ其ノ儘用ヒ $x = -600$ トスルトキ第二照尺ニテ全近ヲ得ル公算ヲ求ム

目標位置 O_1ヨリノ距離	0	−100	−200	−300	−400	−500	−600	−700
π	0.0054	0.0589	0.1702	0.2178	0.1888	0.1385	0.0934	0.0586
O_2ヨリノ距離	+600	500	400	300	200	100	0	−100
同上 r 單位	6	5	4	3	2	1	0	−1
P_S	1	0.9986	0.9795	0.8782	0.5730	0.1781	0.0156	0.0002
πP_S	0.0054	0.0582	0.1667	0.1913	0.1082	0.0247	0.0015	0
$\eta = \Sigma \pi P_S$	0.5560							

斯ノ如キ計算ヲ種々ノ x 値ニ對シ行ヒ曲線ヲ描クヲ得

$x = -200$ トスレバ $\eta = 0.0164$

〃 -300 〃 〃 0.0720

〃 -400 〃 〃 0.1953

〃 -500 〃 〃 0.3715

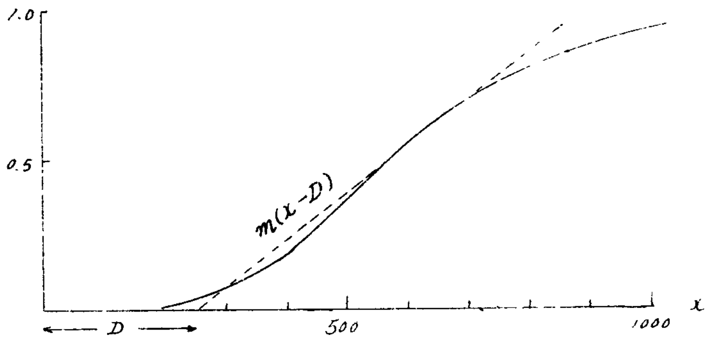
〃 -700 〃 〃 0.7084

〃 -800 〃 〃 0.8191

〃 -900 〃 〃 0.8890

〃 -1000 〃 〃 0.9309

之ヲ作圖スレバ次ノ如キ曲線ヲ得、之ヲ捕捉公算曲線ト云フ



而シテ吾人ノ平常使用スル濶度ノ範圍ニ於テハηノ曲線ハ直線ト見ルモ支障ナカルベク斯クスレバ諸種ノ計算上甚タ便益多シ、依テ

$$\eta = m(x-D)$$

而シテ m 及 D ハ測距公誤戰鬪公誤及彈數ニ依リテ定マル常數ナリ

上ノ場合 O_2 照尺彈ガ同方位彈トナラザル公算

前項ノ公算ト共ニ吾人ガ必要トスルモノハ第二照尺彈ガ少クモ一彈反方位彈トナル公算ナリ、換言スレバ O_2 照尺彈カ O_1 ト同方位彈トナラサル公算ナリ、之ガ計算ハ同要領ニテ行フヲ得、即チ前項ノ例ノ計算中 P_S ノ代リニ $1-P_0$ ヲ用フレハ可ナリ

〔例題〕 前項ノ例ノ場合第二照尺彈ガ少クモ一彈近彈トナル公算ヲ求ム

第七節　變距誤測アル場合ノ捕捉公算

前節ニ於テハ二照尺ニハ爾餘ノ誤差ナク照尺量ノ差ハ直チニ射心間隔トナリテ表ハルル場合ヲ述ベタリ、然ルニ吾人ノ場合ニハ然ラズ射心移動等ハ姑ク之ヲ措クモ變距誤測アル場合ニハ照尺量ノ差以外ニ發射間隔中ノ誤測變距量カ加リタル濶度トナル

L……變距誤測

t……發射間隔

E……發射間隔中ノ誤測變距量（$=0.515Lt$）

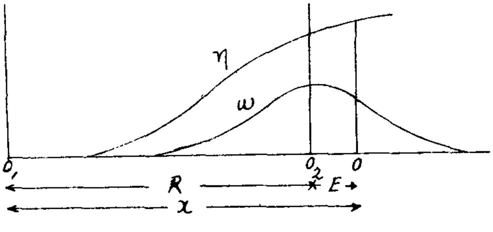
R……照尺差

x……濶度

トスレバ

$$x = R + E \fallingdotseq R + 0.515Lt$$

然レトモLノ量ハ豫知シ得ルモノニアラズ、唯其ノ公算誤差ハ豫メ知ルヲ得ベシ、之ヲ用ヒ前節ノ計算値ヲ基トシ捕捉公算ヲ算出スルヲ得



左圖ニ於テωヲ誤測變距量ノ生起公算トスレバ

$$\omega = f(E)$$

照尺差Rニ對シ

$$x = R + E$$

ナル濶度ノ生起スル公算ハ必竟Eノ生起公算ナリ、故ニ此ノ公算ハ

$$P = \omega = f(E)$$

而シテ x ナル濶度ニテ第二照尺ガ反方位彈トナル公算ハ η ニシテ前節算出セル所ナリ、故ニ Oナル射心カ生起シテ反方位彈ヲ得ル公算ハ $P\eta=\omega\eta$ ニテ表ハサル、然ルニ求ムルモノハ Oノ位置ニ關セズ兎ニ角反方位彈トナレバ可ナルヲ以テ其ノ公算ハ

$$\varsigma = \Sigma P\eta$$

〔例〕 前節ノ例ニ於テ、變距誤測公誤 5 發射間隔 80^s トスルトキ

$R=-600$ ニ對スル捕捉公算ヲ求ム

誤測變距量ノ公算誤差ハ次ノ如クニシテ求メ得

$$r_E=0.515\times5\times80 \doteqdot 200$$

x	−300	−400	−500	−600	−700	−800	−900	−1000	以上
xノ生起公算P	0.0806	0.1069	0.1266	0.1339	0.1266	0.1069	0.0806	0.0544	0.0645
x ニ對スル捕捉公算 η	0.0720	0.1953	0.3715	0.5560	0.7084	0.8191	0.8890	0.9309	≒0.95
$P\eta$	0.0058	0.0209	0.0471	0.0744	0.0899	0.0877	0.0717	0.0503	0.0612
$\zeta=\Sigma P\eta$	0.5090								

前節例ノ答ニ比較シ變距誤測アル場合ハ捕捉公算減スルヲ見ルベシ

捕捉公算ニ依ル變距誤測ノ推定

二照尺ヲ以テ目標ヲ夾叉セルトキ、變距誤測ノ最確値ヲ求ムル方法ヲ述ベン前節

$$\eta = m(x-D)$$

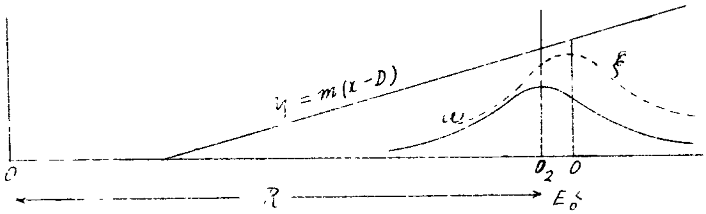
ニヨリ此ノ場合ハ

$$\eta=m(R+E-D) \qquad (1)$$

而シテ E ノ生起公算ハ誤差法則ニ從ヒ

$$\omega=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2E^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

此ノ關係ヲ圖示スレバ



圖ニ於テ O ナル位置ヲ考フレバ ω' ハ O ノ生起スル先天公算ナリ、而シテ射心 O ニアレバ捕捉公算ハ η' ナリ、故ニ此ノ場合ニ第二照尺ノ射心ガ O ニアリト思ハルル公算ハ原因公算ノ理ニヨリ

$$\xi'=\frac{\omega'\,\eta'}{\Sigma\omega\eta}$$

一般ニ

$$\xi=\frac{\omega\,\eta}{\Sigma\omega\eta}=\frac{1}{K}\,\omega\eta$$

之ニ (1) (2) ヲ代入シテ

$$\xi=\frac{1}{K}\,m\,(R+E-D)\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2E^2}$$

E ノ最確値ハ此ノ公算ヲ最大ナラシムルモノナラサルベカラズ、故ニ微分シテ 0 ト置ケハ最確値 E_0 ヲ得

$$\frac{d\xi}{dE}=\frac{mh}{\sqrt{\pi}\,K}e^{-h^2E_0^2}\left\{1-2h^2E_0(R+E_0-D)\right\}=0$$

整理スレバ

$$E_0^2+(R-D)E_0-\frac{1}{2h^2}=0$$

$$\therefore\quad E_0=\frac{-(R-D)\pm\sqrt{(R-D)^2+\dfrac{2}{h^2}}}{2}$$

圖ニ就テ見ルモ明カナル如ク Eハ常ニ正ナラサルベカラズ、依テ

$$E_0=\frac{-(R-D)+\sqrt{(R-D)^2+\frac{2}{h^2}}}{2}$$

第二章第六節ニ依リ

$$h=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\varepsilon}\quad(\varepsilon\text{ハ平均誤差})$$

之ヲ代入スレバ

$$E_0=\frac{-(R-D)+\sqrt{(R-D)^2+2\pi\varepsilon^2}}{2}$$

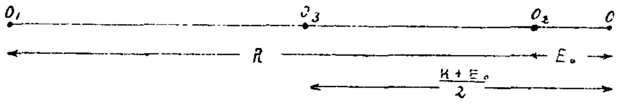
之即チ二照尺間ニ目標ヲ夾叉セルトキノ誤測變距量ノ最確値ナリ

前項ノ場合目標存在公算最大ナル點

第六節ニヨリ二照尺間ニ目標ヲ夾叉セルトキ目標ノ存在公算最大ナル點ハ濶度ノ中央ナリ、故ニ此ノ場合ハ

$$\frac{x}{2}=\frac{R+E_0}{2}>\frac{R}{2}$$

ナル距離ノ點ニ於テ最大ナリ、此ノ關係下圖ノ如シ



故ニ次ノ照尺ヲ O_3 ニ導ク爲ニハ第二照尺ニ對シテ二照尺ノ差ノ半量ヨリ大ナル修正ヲ要ス

——(終)——